$1^{η}$ δεκάδα θεμάτων επανάληψης

1.

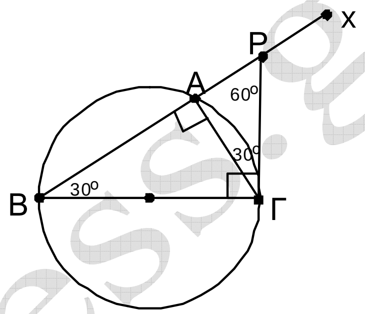
Έστω κύκλος (O, R) και διάμετρός του ΒΓ . Μία ημιευθεία Bx τέτοια ώστε

$Γ\hat{B}x = 30^o$ τέμνει τον κύκλο στο A . Η εφαπτομένη του κύκλου στο Γ τέμνει την Bx στο P . Δείξτε ότι

i) ΑΓ= R , **ii)** $\dfrac{(PBΓ)}{(PAΓ)} = 4$, **iii)** $PΓ = \dfrac{2R\sqrt{3}}{3}$

Λύση

i)



Επειδή η ΒΓ είναι διάμετρος θα είναι

$B\hat{A}Γ = 90^o$ σαν εγγεγραμμένη σε ημικύκλιο.
Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B} = 30^o$
άρα $AΓ = \dfrac{BΓ}{2} = \dfrac{2R}{2} = R$

ii)

Η εφαπτόμενη PΓ είναι κάθετη στην διάμετρο ΒΓ άρα το τρίγωνο PBΓ είναι ορθογώνιο οπότε

$$\frac{(PBΓ)}{(PAΓ)} = \frac{\frac{1}{2}BΓ\cdot PΓ}{\frac{1}{2}AΓ\cdot PΓ ημ A\hat{Γ}P} = \frac{2R}{Rημ30^o} = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$$

iii)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΓΡ είναι $A\hat{Γ}P = 30^o$ άρα

$AP = \dfrac{PΓ}{2}$ και από το πυθαγόρειο θεώρημα

$$PΓ^2 = AΓ^2 + AP^2 \Leftrightarrow PΓ^2 = R^2 + \left(\frac{PΓ}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \ldots PΓ = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

ή επίσης ποιο εύκολα με χρήση τριγωνομετρίας στο ορθογώνιο τρίγωνο PBΓ έχουμε

$$εφ30^o = \frac{PΓ}{BΓ} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{PΓ}{2R} \Leftrightarrow PΓ = \frac{2R\sqrt{3}}{3}$$

2.

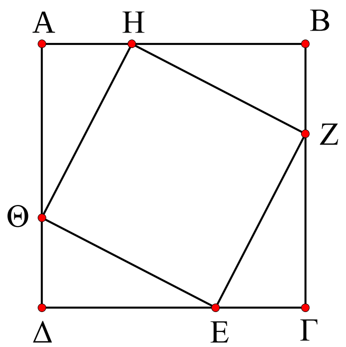
Στο διπλανό σχήμα τα ΑΒΓΔ και ΕΖΗΘ είναι τετράγωνα έτσι ώστε

ΑΒ = 7 και ΑΘ = ΒΗ = ΓΖ = ΔΕ = 3 .

Να βρείτε :

i) Το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ

ii) Να υπολογίσετε το εμβαδό του τριγώνου ΕΓΖ και να δείξετε ότι η ακτίνα του εγγεγραμμένου του κύκλου (Λ, ρ) είναι ρ=1



iii) Αν (Κ, R) είναι ο εγγεγραμμένος κύκλος στο τετράγωνο ΕΖΗΘ να βρείτε το λόγο του εμβαδού του κύκλου (Κ, R) προς το εμβαδόν του κύκλου (Λ, ρ) .

Προτεινόμενη λύση

i)

Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΕΓΖ με βάση την υπόθεση έχουμε ΕΓ = 4 και ΓΖ = 3

Από το πυθαγόρειο βρίσκουμε ότι ΕΖ = 5 οπότε

(ΕΖΗΘ) = 25

ii)

(ΕΖΓ) = $\frac{1}{2}$ ΕΓ· ΖΓ = 6 οπότε από τον τύπο Ε = τρ όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου προκύπτει ότι

$6 = 6\rho \Leftrightarrow \rho = 1$

iii)

Είναι φανερό ότι η διάμετρος του εγγεγραμμένου κύκλου στο τετράγωνο ΕΖΗΘ είναι ίση με την πλευρά του τετραγώνου οπότε $2R = 5 \Leftrightarrow R = \frac{5}{2}$ συνεπώς

$$\frac{E_{(K,\,R)}}{E_{(\Lambda,\,\rho)}} = \frac{\pi R^2}{\pi \rho^2} = \frac{25}{4}$$

3.

i) Πως εγγράφουμε τετράγωνο σε κύκλο ;

ii) Να αποδείξετε ότι για την πλευρά λ_4 και το απόστημα α_4 ενός τετραγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο ισχύουν οι τύποι $\lambda_4 = R\sqrt{2}$ και $\alpha_4 = \dfrac{R\sqrt{2}}{2}$

iii) Τετράγωνο είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O, R) και έχει πλευρά $\lambda_4 = 6\sqrt{2}$, απόστημα α_4 , περίμετρο P_4 και εμβαδόν E_4 στον παρακάτω πίνακα να κάνετε τις σωστές αντιστοιχίσεις

Στήλη Α	Στήλη Β
R	$3\sqrt{2}$
α_4	$24\sqrt{2}$
P_4	24
E_4	6
	$12\sqrt{2}$
	72

iv) Αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου είναι 32 , τότε η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου είναι

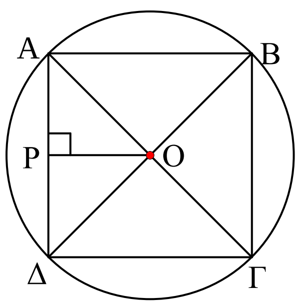
α) $4\sqrt{2}$, **β**) 8 , **γ**) 4 , **δ**) $8\sqrt{2}$

κυκλώστε την σωστή απάντηση

Προτεινόμενη λύση

i)

Για να εγγράψουμε τετράγωνο σε κύκλο (O, R) φέρνουμε όπως φαίνεται και στο δίπλα σχήμα δύο καθέτους διαμέτρους ΑΓ και ΒΔ



Τότε $A\hat{O}B = B\hat{O}\Gamma = \Gamma\hat{O}\Delta = \Delta\hat{O}A = 90^o$

άρα $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{B\Gamma} = \overset{\frown}{\Gamma\Delta} = \overset{\frown}{\Delta A}$. Οπότε το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο

ii)

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΟΔ έχουμε

$A\Delta^2 = OA^2 + O\Delta^2 \Leftrightarrow$

$\lambda_4^2 = R^2 + R^2 \Leftrightarrow \lambda_4^2 = 2R^2 \Leftrightarrow \lambda_4 = R\sqrt{2}$

Και από την σχέση $R^2 = \alpha_\nu^2 + \frac{\lambda_\nu^2}{4}$ για ν = 4 παίρνουμε

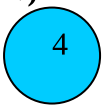
$$R^2 = \alpha_4^2 + \frac{\lambda_4^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$R^2 = \alpha_4^2 + \frac{\left(R\sqrt{2}\right)^2}{4} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow \alpha_4 = \frac{R\sqrt{2}}{2}$$

iii)

$R \to 6$, $\alpha_4 \to 3\sqrt{2}$, $P_4 \to 24\sqrt{2}$, $E_4 \to 72$

iv)



4.

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $\alpha = 5$, $\beta = 4$ και $\gamma = 2$ τότε

i) Η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ του τριγώνου είναι

α) ορθή , **β)** αμβλεία , **γ)** οξεία

επιλέξτε την σωστή απάντηση και δικαιολογήστε την απάντησή σας

ii) Υπολογίστε την διάμεσο μ_β του τριγώνου ΑΒΓ και την προβολή της διαμέσου μ_α πάνω στην πλευρά β

Προτεινόμενη λύση

i)

Έχουμε

$\alpha^2 = 25$ και $\beta^2 + \gamma^2 = 16 + 4 = 20$ άρα $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ οπότε

η γωνία $B\hat{A}\Gamma$ είναι αμβλεία άρα σωστή απάντηση η **β**

ii)

$$\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4} = \frac{50 + 8 - 16}{4} = \frac{42}{4} = 10{,}5 \text{ άρα}$$

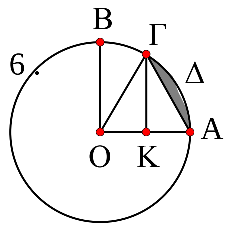
$\mu_\beta = \sqrt{10{,}5}$ και

$\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha\, M\Delta$, όπου ΜΔ η προβολή της διαμέσου μ_α στην πλευρά α άρα

$$16 - 4 = 10M\Delta \Leftrightarrow M\Delta = \frac{12}{10} = 1{,}2$$

5.

Η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ του διπλανού κυκλικού τομέα $O\ \overset{\frown}{AB}$ είναι ορθή και η ακτίνα του κύκλου είναι $\rho = 6$. Η κάθετη από το μέσο Κ της ακτίνας ΟΑ τέμνει τον κύκλο στο Γ



i) Να δείξετε ότι η γωνία $A\hat{O}\Gamma$ είναι 60^o

ii) Να υπολογίσετε το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$

iii) Ο λόγος του μήκους του τόξου $\overset{\frown}{A\Gamma}$ προς το μήκος του τόξου $\overset{\frown}{B\Gamma}$ είναι

α) 3, **β)** $\frac{1}{2}$, **γ)** 2 , **δ)** $\frac{1}{3}$

επιλέξτε την σωστή απάντηση

iv) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του κυκλικού τμήματος ΑΔΓΑ (γκρίζα περιοχή)

Προτεινόμενη λύση

i)

Επειδή ΓΚ μεσοκάθετος στο ΟΑ είναι ΓΟ = ΓΔ , όμως ΓΟ = ΟΑ = ρ άρα

ΓΟ = ΓΑ = ΟΑ οπότε το τρίγωνο ΓΟΑ είναι ισόπλευρο συνεπώς $A\hat{O}\Gamma = 60^o$

ii)

$$\ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}} = \frac{\pi\rho\mu^o}{180^o} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 60^o}{180^o} = 2\pi \text{ μονάδες μήκους}$$

iii)

Είναι $B\hat{O}\Gamma = 30^o$ οπότε

$$\ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}} = \frac{\pi\rho\mu^o}{180^o} = \frac{\pi \cdot 6 \cdot 30^o}{180^o} = \pi \text{ μονάδες μήκους συνεπώς}$$

$$\frac{\ell_{\overset{\frown}{A\Gamma}}}{\ell_{\overset{\frown}{B\Gamma}}} = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ επομένως σωστή απάντηση είναι η } \boldsymbol{\gamma}$$

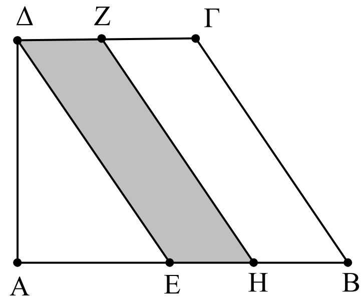
iv)

$$E_{\overline{A\Delta\Gamma A}} = E_{(O,\ \overset{\frown}{A\Gamma})} - E_{\triangle OA\Gamma} =$$

$$= \frac{\pi\rho^2\mu^o}{360^o} - \frac{1}{2} OA \cdot O\Gamma \,\eta\mu\, A\hat{O}\Gamma =$$

$$= \frac{\pi \cdot 36 \cdot 60}{360^o} - \frac{1}{2} 6 \cdot 6 \,\eta\mu\, 60^o = (6\pi - 9\sqrt{3}) \text{ τ. μ}$$

6.



Το οικόπεδο ΑΒΓΔ του διπλανού σχήματος έχει

ΑΒ = 55m , ΓΔ = 25m , ΑΔ = 40m και $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^o$

Πρέπει να χαραχθεί ένας δρόμος ΔΕΗΖ ,

με ΔΕ // ΓΒ και ΖΗ // ΓΒ , ο οποίος θα χωρίσει

το οικόπεδο σε δύο τεμάχια ΑΕΔ και ΖΗΒΓ ,

όπως φαίνεται και στο σχήμα

i) Να βρείτε το εμβαδόν του οικοπέδου ΑΒΓΔ

ii) Να βρείτε το εμβαδόν του τεμαχίου ΑΕΔ

iii) Να βρεθεί το ΔΖ έτσι ώστε , το τεμάχιο ΖΗΒΓ να έχει το ίδιο εμβαδόν με το τεμάχιο ΑΕΔ

iv) Ποιο είναι το πλάτος του δρόμου ΔΕΗΖ στην περίπτωση (iii)

Προτεινόμενη λύση

i)

Αφού $\widehat{A} = \widehat{\Delta} = 90^o$ θα είναι ΔΓ // ΑΒ οπότε το ΑΒΓΔ είναι τραπέζιο συνεπώς

$(AB\Gamma\Delta) = \dfrac{(AB + \Delta\Gamma)A\Delta}{2} = \dfrac{(55 + 25)40}{2} = 1600\ m^2$

ii)

Επειδή ΔΕ // ΒΓ και ΔΓ // ΑΒ το ΔΓΒΕ είναι παραλληλόγραμμο επομένως

$EB = \Delta\Gamma = 25$ m , συνεπώς $AE = AB - EB = 55 - 25 = 30$ m οπότε

$(A\Delta E) = \dfrac{1}{2} A\Delta \cdot AE = \dfrac{1}{2} \cdot 40 \cdot 30 = 600 m^2$.

iii)

Πρέπει

$(Z\Gamma BH) = 600 \Leftrightarrow Z\Gamma \cdot A\Delta = 600 \Leftrightarrow 40 Z\Gamma = 600 \Leftrightarrow Z\Gamma = 15$ m

Επομένως $\Delta Z = \Delta\Gamma - Z\Gamma = 25 - 15 = 10$m

iv)

Το πλάτος του δρόμου ΔΖΗΕ είναι ίσο με το ύψος υ του παραλληλογράμμου ΔΖΗΕ που αντιστοιχεί στις βάσεις ΔΕ και ΖΗ .

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ΔΖΗΕ είναι ίσο με

$(\Delta ZHE) = (AB\Gamma\Delta) - (A\Delta E) - (ZH\Gamma B) = 1600 - 1200 = 400 m^2$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΑΔΕ έχουμε ότι $\Delta E^2 = A\Delta^2 + AE^2 = 1600 + 900 = 2500$

Οπότε ΔΕ = 50 m

Τώρα $(\Delta ZHE) = \Delta E \cdot \upsilon \Leftrightarrow 400 = 50\ \upsilon \Leftrightarrow \upsilon = 8$ m

7.

i) Να αποδείξετε ότι σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο το τετράγωνο του ύψους που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των καθέτων πλευρών του στην υποτείνουσα

ii) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις σωστές (Σ) ή λανθασμένες (Λ)

α) Σε κάθε τρίγωνο ισχύει η ισοδυναμία : $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \widehat{A} > 90^o$

β) Σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει : $\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \dfrac{\alpha^2}{2}$

γ) Αν δύο χορδές ΑΒ , ΓΔ ενός κύκλου ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται στο Ρ τότε ισχύει : $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$

δ) Η πλευρά λ_6 κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) είναι ίση με $\lambda_6 = R\sqrt{2}$

iii) Στις παρακάτω προτάσεις να επιλέξτε την σωστή απάντηση

α) Το εμβαδόν κυκλικού τομέα κέντρου Ο και ακτίνας ρ με επίκεντρη γωνία μ^o δίνεται από την ισότητα

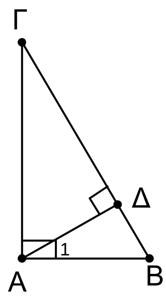
Α . $(OAB) = \dfrac{\pi\rho\mu}{180}$, Β . $(OAB) = \dfrac{\pi\rho^2\mu}{360}$, Γ. $(OAB) = \pi\rho^2\mu$

β) Το απόστημα α_6 κανονικού εξαγώνου εγγεγραμμένου σε κύκλο (Ο, R) είναι ίσο με

Α . $\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$, Β. $\dfrac{R}{2}$, Γ . $\dfrac{R\sqrt{3}}{2}$

Λύση

i)



Στο διπλανό σχήμα αν $\widehat{A} = 90^o$ και $A\Delta \perp B\Gamma$

Θα αποδείξουμε ότι : $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ έχουν $\widehat{A}_1 = \widehat{\Gamma}$ ως οξείες με κάθετες πλευρές , άρα είναι όμοια οπότε

$\dfrac{A\Delta}{\Delta\Gamma} = \dfrac{B\Delta}{A\Delta} \Leftrightarrow A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

ii)

$\alpha \to \Lambda$, $\beta \to \Sigma$, $\gamma \to \Sigma$, $\delta \to \Lambda$

iii)

α . Σωστή απάντηση η Β

β . Σωστή απάντηση η Γ

8.

Δίνεται κύκλος (O, R) και σημείο Σ εκτός αυτού ώστε ΟΣ = 20 . Από το Σ φέρνουμε τις τέμνουσες ΣΑΒ και ΣΓΔ του κύκλου ώστε ΣΑ = 6 , ΣΒ = x − 3 , ΣΓ = 4 , ΓΔ = x και την εφαπτομένη ΣΕ . Να υπολογίσετε

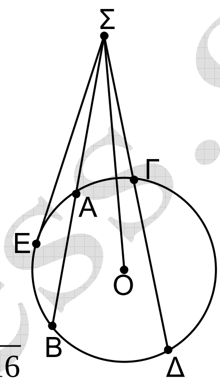
i) Το x

ii) Την ακτίνα R του κύκλου

iii) Το μήκος του τμήματος ΣΕ

Προτεινόμενη λύση

Ένα πρόχειρο σχήμα είναι το διπλανό



i)

Έχουμε ότι

$ΣΑ \cdot ΣΒ = ΣΓ \cdot ΣΔ \iff$

$6(x-3) = 4\,(4 + x) \iff x = 17$

ii)

Επίσης

$ΣΑ \cdot ΣΒ = ΣΟ^2 - R^2 \iff 6 \cdot 14 = 400 - R^2 \iff R = \sqrt{316}$

Και

iii)

$ΣΕ^2 = ΣΑ \cdot ΣΒ \iff ΣΕ^2 = 84 \iff ΣΕ = \sqrt{84}$

9.

Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ο λόγος των καθέτων πλευρών του ΑΒ και ΑΓ είναι

$\frac{AB}{A\Gamma}=\frac{3}{4}$ και η προβολή ΒΔ της κάθετης πλευράς ΑΒ στη υποτείνουσα ΒΓ είναι 9 .

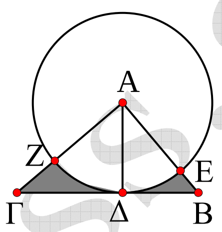
Με κέντρο την κορυφή Α και ακτίνα το ύψος ΑΔ γράφουμε κύκλο (Α, ΑΔ) , που τέμνει τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα . Να υπολογίσετε

i) Τα μήκη των τμημάτων ΔΓ και ΑΔ

ii) Το άθροισμα των εμβαδών των μικτογράμμων τριγώνων ΒΔΕ και ΔΓΖ

Λύση

Ένα πρόχειρο σχήμα είναι το διπλανό



i)

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{AB^2}{A\Gamma^2}=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \quad \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{AB}{A\Gamma}\right)^2=\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{9}{16}=\frac{9}{\Delta\Gamma} \quad \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 16$$

Επίσης $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 9 \cdot 16 = 144$ άρα $A\Delta = 12$

ii)

Το άθροισμα των εμβαδών των μικτογράμμων τριγώνων ΒΔΕ και ΔΓΖ προκύπτει αν από το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ αφαιρέσουμε το εμβαδό του κυκλικού τομέα

$(A\,\overset{\frown}{EZ})$

‘Ομως

$$E_{\triangle AB\Gamma}=\frac{1}{2}B\Gamma\cdot A\Delta=\frac{1}{2}(9+16)\cdot 12=150 \text{ και}$$

$$E_{(A.\ \overset{\frown}{E\Delta Z})}=\frac{\pi A\Delta^2\cdot 90^o}{360^o}=36\pi$$

Άρα

$E_{\text{ζητούμενο}} = (150 - 36\pi)$ τετραγωνικές μονάδες

10.

Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με ΑΒ // ΓΔ . Αν Μ και Ν είναι τα μέσα των βάσεων ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα και Ο τυχαίο σημείο του τμήματος ΜΝ , τότε να αποδείξετε ότι

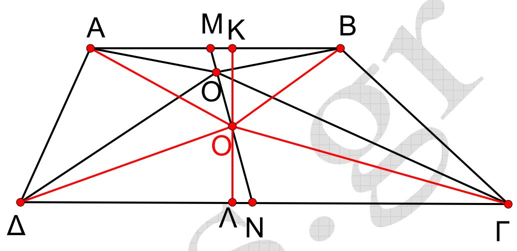
i) Τα τρίγωνα ΟΒΓ και ΟΑΔ έχουν ίσα εμβαδά

ii) Αν το Ο είναι το μέσο του ΜΝ τότε ισχύει

$(\text{ΑΟΔ}) = \frac{1}{4}(\text{ΑΒΓΔ})$

Λύση

Ένα πρόχειρο σχήμα είναι το διπλανό



i)

Επειδή ΑΜ = ΜΒ , ΔΝ = ΝΓ τα τραπέζια ΑΜΝΔ και ΜΒΓΝ έχουν ίσες βάσεις και το ίδιο ύψος υ = ΚΛ άρα είναι ισοδύναμα δηλαδή

(ΑΜΝΔ) = (ΜΒΓΝ) **(1)**

Στο τρίγωνο ΟΑΒ η ΟΜ είναι διάμεσος άρα τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΜΒ είναι ισοδύναμα δηλαδή (ΟΑΜ) = (ΟΜΒ) **(2)**

Ομοίως (ΟΔΝ) = (ΟΝΓ) **(3)**

Από τις **(1)** , **(2)** και **(3)** έχουμε ότι

$(\text{ΑΜΝΔ}) - (\text{ΟΑΜ}) - (\text{ΟΔΝ}) = (\text{ΜΒΓΝ}) - (\text{ΟΜΒ}) - (\text{ΟΝΓ}) \Leftrightarrow$

(ΟΑΔ) = (ΟΒΓ)

ii)

Αν το Ο είναι το μέσο του τμήματος ΜΝ τότε όπως εύκολα διαπιστώνουμε τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΟΝΛ είναι ίσα επομένως $\text{ΟΚ} = \text{ΟΛ} = \frac{\upsilon}{2}$ οπότε

$$(\text{ΟΑΒ}) + (\text{ΟΔΓ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\text{ΟΚ} + \frac{1}{2}\text{ΓΔ}\cdot\text{ΟΛ} =$$

$$= \frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\frac{\upsilon}{2} + \frac{1}{2}\text{ΓΔ}\cdot\frac{\upsilon}{2} = \frac{1}{2}\,\frac{(\text{ΑΒ}+\text{ΔΓ})\upsilon}{2} = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$$

Τότε θα είναι και

$$(\text{ΑΟΔ}) + (\text{ΟΒΓ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ}) \Leftrightarrow$$

$$2(\text{ΑΟΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ}) \Leftrightarrow (\text{ΑΟΔ}) = \frac{1}{2}(\text{ΑΒΓΔ})$$